

# Análisis de fatiga de materiales con la distribución Birnbaum-Saunders: una aplicación del Teorema Central del Límite.

Silvia N. Pérez<sup>1</sup>, Daniel Leibovich<sup>1</sup>, Mónica Giuliano<sup>1</sup>, Aldo Sacerdoti<sup>1</sup>

(1) *Universidad Nacional de La Matanza*

*Email: snoemiperez@gmail.com*

**RESUMEN:** La propuesta de este trabajo es presentar un proyecto de ingeniería que bien puede ser interpretado por alumnos de la asignatura de Probabilidades y Estadística de carreras de Ingeniería, donde el estudiante debe analizar datos de tiempos de falla valiéndose de una aplicación del Teorema Central del Límite. Esta tarea le permitirá realizar de manera sencilla un análisis exploratorio de los datos, como así también el ajuste del modelo y posteriores estimaciones con soporte de software. En el estudio de suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, surge como ejemplo el caso de procesos de fatiga de materiales, donde el crecimiento de una grieta al cabo de muchos ciclos ocasiona la falla. Bajo ciertas condiciones, el número total de ciclos hasta la falla puede aproximarse utilizando el Teorema Central del Límite, dando como resultado la distribución Birnbaum-Saunders. Esta distribución describe entonces el tiempo de falla que ha transcurrido cuando cierta clase de daño acumulado excede un umbral. Para analizar este tipo de datos, el alumno deberá disponer de un software adecuado, por lo que se propone acercarlo al programa R, de libre distribución y gran versatilidad. Más aún, este programa dispone de un paquete recientemente incluido para el análisis de la distribución Birnbaum-Saunders, lo que permite llevar a cabo ajustes y comparaciones de modelos, entre otras aplicaciones. La propuesta de trabajo introduce al futuro ingeniero en un análisis de casos reales, y le proporciona herramientas para resolverlo, quedando a su disponibilidad la intensificación de la tarea si se interesa en conocer otras aplicaciones del modelo o del software.

**PALABRAS CLAVES:** Datos de fatiga, Birnbaum-Saunders

## 1 INTRODUCCIÓN

Actualmente el profesional de la ingeniería necesita un conocimiento de estadística que le permita interactuar en el lugar de trabajo comprendiendo y haciendo uso de metodologías estadísticas propias para la Ingeniería. Dentro de la currícula de la materia Probabilidades y Estadística en la universidad, la inferencia ocupa un lugar fundamental puesto que permite modelar la incertidumbre en la toma de decisiones respecto a problemáticas reales: decidir acerca de la adecuación de un producto a las normas establecidas, evaluar la proporción de defectuosos en determinada producción, etc. El futuro ingeniero debe prepararse para abordar este tipo de problemas desde el conocimiento de modelos teóricos adecuados y la implementación de éstos mediante técnicas computacionales.

En este artículo se presenta una propuesta de transferencia al aula de resultados obtenidos de una investigación avanzada sobre procesos aleatorios. Esta se concibe como un trabajo de intensificación adecuado a alumnos avanzados de Ingeniería Industrial. Se integran contenidos teóricos básicos y utilización de software para el análisis de datos reales.

En primer lugar se plantea una introducción al problema a resolver y luego se presentan desarrollos teóricos que sustentan el modelo. El problema implica realizar un análisis exploratorio de los datos obtenidos de un proceso de fatiga de materiales, donde el crecimiento de una grieta al cabo de muchos ciclos ocasiona la falla (Askeland, 1998; Gere, 2002). Bajo ciertas condiciones, el número total de ciclos hasta la falla puede aproximarse, utilizando el Teorema Central del Límite, dando como resultado la

distribución Birnbaum-Saunders. Esta distribución describe entonces el tiempo de falla que ha transcurrido cuando cierta clase de daño acumulado excede un umbral. Se propone analizar el ajuste del modelo y posteriores estimaciones. Se recomienda utilizar como soporte el software R, de libre distribución. Este programa dispone de un paquete recientemente incluido para el análisis de la distribución Birnbaum-Saunders, lo que permite llevar a cabo ajustes y comparaciones de modelos, entre otras aplicaciones.

Durante este año se espera poner en práctica la propuesta.

## 2 ESTRATEGIA DIDACTICA

La propuesta didáctica se plantea en tres etapas: en la primera se acerca al alumno a la problemática presentando los datos de fatiga originalmente presentados por Birnbaum y Saunders (1969), motivándolo a plantear estrategias de análisis: ¿qué tipo de variable se estudia? cómo puede modelarse esta variable? cuáles son los modelos disponibles?

En la siguiente etapa se le provee de material que permita relacionar la variable tiempo de vida observada en estos datos con la distribución Birnbaum-Saunders, mostrando que esta se deriva a partir de la aplicación del teorema central del límite. Si bien no se pretende que el alumno desarrolle por sí mismo estas deducciones, se espera que sea capaz de seguir éstas, revisando de esta forma sus conocimientos del teorema mencionado, de distribuciones conocidas como la Normal, de resultados de cambios de variables, etc., siendo todos estos contenidos parte del curso de Probabilidades y Estadística. En esta etapa también el alumno deberá introducirse al software R, estudiando las posibilidades de análisis que le brinda.

La última etapa consiste en analizar finalmente el conjunto de datos por medio de la distribución BS. El análisis puede requerir: el ajuste del modelo, obteniendo los estimadores de los parámetros; evaluar la adecuación del modelo a través de criterios de bondad de ajuste; hallar probabilidades asociadas al tiempo de vida, etc.

El artículo está organizado del siguiente modo: en la siguiente sección se plantea una introducción al problema que se propone resolver y en la siguiente sección se presentan los desarrollos teóricos que sustentan el modelo, los que serán presentados al alumno. Luego se analiza el soporte que brinda el software R en la resolución

del problema, y en la última sección se presentan los datos a analizar, con algunos resultados esperables del análisis a efectuar por parte del alumno.

## 3 INTRODUCCION AL PROBLEMA: DATOS DE FATIGA DE MATERIALES

El tipo de datos que se propone analizar representa tiempos de vida de materiales expuestos a pruebas de fatiga, donde la falla ocurre debido al crecimiento y desarrollo de una fractura dominante, esto es, la grieta crece hasta un valor crítico que causa la falla. Para describir este suceso se puede definir el crecimiento de la grieta en cada ciclo de carga que sufre el material como una variable aleatoria independiente de los ciclos pasados. Bajo la aplicación repetida de  $n$  ciclos de carga, la extensión total de la grieta puede expresarse como

$$W_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad (1)$$

donde  $X_j$  representa el crecimiento de la grieta en el  $j$ -ésimo ciclo. Supongamos que la falla ocurre cuando  $W_n$  excede un valor crítico  $w$ . Si  $N$  es la variable que cuenta en qué ciclo ocurre la falla y si se puede asumir que esto ocurre con  $n$  grande, su distribución límite se encuentra a partir de hallar la distribución de  $W_n$  utilizando el Teorema Central del Límite.

Este tipo de análisis se relaciona con procesos de renovación, donde uno de los objetos de estudio es la distribución de la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una correspondiendo a tiempos de falla de cada componente que se va reponiendo.

## 4 UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE

### 4.1 Analizando la suma de variables con el TCL

Assumiendo que los datos corresponden al problema planteado anteriormente, si  $X_j$  representa el crecimiento de la grieta en el  $j$ -ésimo ciclo, estas corresponden a variables aleatorias idénticamente distribuidas, no negativas, con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Sea  $W_n$  definida como en (1), entonces el teorema central del límite (Freund y Walpole, 1980, entre otros) afirma que para  $n$  suficientemente grande la distribución de  $W_n$  es aproximadamente Normal

con media  $E(W_n)=n\mu$  y varianza  $Var(W_n)=n\sigma^2$ , esto es:

$$\frac{W_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{W_n}{\sqrt{n}\sigma} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} = Z \approx N(0;1) \quad (2)$$

La probabilidad de que ocurra la falla después del  $n$ -ésimo ciclo resulta equivalente al hecho de que la grieta total hasta ese ciclo no haya superado el umbral crítico  $w$ , esto es  $P(N > n) = P(W_n < w)$ . Equivalentemente,

$$P(N \leq n) = 1 - \Phi\left(Z = \frac{w}{\sqrt{n}\sigma} - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(Z = \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} - \frac{w}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de la Normal estándar. Si se puede suponer que los ciclos son muchos, cada uno de corta duración, podemos reemplazar la variable  $N$  (número de ciclos) por una variable continua  $T =$  tiempo hasta la falla, para la que se tiene la función de distribución acumulada:

$$F(T = t) = \Phi\left(Z = \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} - \frac{w}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \Phi\left(Z = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros de forma y escala, respectivamente, dados por

$$\alpha = \sigma / w\sqrt{\mu} \text{ y } \beta = w / \mu.$$

La distribución resultante se denomina Birnbaum-Saunders (BS) y fue derivada en 1969 para estudiar problemas de vibración encontrados en nuevos aviones comerciales (Birnbaum, Saunders, 1969).

El análisis desarrollado en esta sección sólo contempla el uso de herramientas básicas de estadística: manejo de distribuciones comunes, como la Normal; aplicación del teorema central del límite, etc. El trabajo que se propone a los alumnos contempla para esta parte sólo seguir las deducciones, eventualmente guiándolo con un cuestionario.

## 5 USANDO R

Una vez direccionado el problema a un análisis a través de la distribución BS, el alumno deberá introducirse en el manejo de algún software

adecuado para ajustar el modelo a los datos. Para la elección del paquete estadístico a usar en un curso universitario de Estadística debe tenerse en cuenta varios factores: que esté disponible en los laboratorios de informática de la universidad, que el estudiante pueda disponer del software fuera del curso, eventualmente en su computadora personal, que el estudiante pueda aprender a usar mínimamente el software en un tiempo razonable, preferentemente sin requerir más que un corto tutorial o utilizando la ayuda disponible on-line y que el software sea tan completo como sea posible, ofreciendo al estudiante la posibilidad de utilizar análisis más sofisticados si desea avanzar en estudios estadísticos.

Si bien hay muchos paquetes estadísticos disponibles en el mercado, son pocos los que se adaptan a este requerimiento. En este proyecto se decidió trabajar con el software R (<http://www.r-project.org>). Una vasta información está disponible en R CRAN (Comprehensive R Archive Network), en particular manuales y tutoriales, y permite comenzar con el manejo básico de la sintaxis. Uno de los mayores atractivos de R consiste en su capacidad de combinar análisis “pre-empaquetados” con análisis específicos programados *ad-hoc* por el usuario. Si bien no es trivial lograr destreza en su utilización, puede direccionarse el aprendizaje hacia un aprovechamiento básico de las ventajas de su potencia y versatilidad comenzando con el manejo de datos desde distintos ficheros, por ejemplo datos de planillas Excel. Más aún, si se desea utilizar conocimientos previos de este último, existen protocolos que permiten integrar Excel y R de manera eficiente sacando partido de las ventajas de ambos programas (Dell’Omodarme, M.; Valle, G.; 2006).

### 5.1 El Package BS en R

Las dificultades aparentes en el ajuste de la distribución Birnbaum-Saunders pueden resolverse utilizando el paquete BS (Leiva et al, 2006) recientemente incorporado al software R. Este permite calcular estimadores de los parámetros de la distribución, graficar la función densidad, evaluar la función de distribución acumulada y calcular a partir de esta probabilidades asociadas a la variable, utilizar métodos de bondad de ajuste para evaluar la adecuación del modelo, etc.

A modo de ejemplo de los gráficos disponibles en el paquete, en la Figura 1 se muestra el gráfico de distintas densidades BS, variando los parámetros de forma y escala.

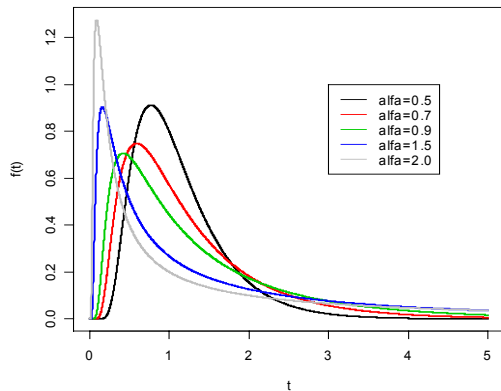


Figura 1. Gráfico de densidades BS para distintos  $\alpha$  y  $\beta=1$ .

Otra utilidad puede encontrarse en la evaluación de la función distribución acumulada para una densidad BS con parámetros  $\alpha=0.5$  y  $\beta=1.0$ , por ejemplo, corresponde a aplicar la siguiente sintaxis:

`> pbs(1,alpha=0.5,beta=1.0,log=FALSE)`

obteniéndose como respuesta el valor de  $F(X=1)=0.5$

Esto permite calcular probabilidades, por ejemplo la probabilidad de que la variable tome valores entre 0.3 y 1 se calcula a partir de:

$$P(0.3 < X < 1) = F(X=1) - F(X=0.5) = 0.5 - 0.0786496 = 0.42135$$

En esta etapa se pretende que el alumno explore por sí mismo las aplicaciones disponibles en el paquete para así abordar el análisis de datos propuesto.

## 6 ANÁLISIS DE DATOS REALES

Esto corresponde a la última etapa del proyecto, donde se requiere que el alumno responda distintas consignas para analizar los datos. Se presentan dos conjuntos de datos, uno el motivador del problema, siendo el que dio origen a la distribución BS, y el segundo correspondiendo también a datos de tiempos de vida que son estudiados en el artículo original (Cohen y otros, 1984) con un modelo Weibull de 3 parámetros pero puede ajustarse también adecuadamente con el modelo BS.

### 6.1 Datos de fatiga de aluminio.

En este ejemplo se usan los datos que emplearon originalmente Birnbaum y Saunders (1969) para

presentar la distribución que lleva su nombre. Los datos corresponden a tiempos de vida en ciclos  $\times 10^3$  de piezas de aluminio 6061-T6 cortadas en un ángulo paralelo a la dirección de rotación y oscilando a 18 ciclos por segundo a una presión máxima de 31000psi (pounds per square inch). Estos datos son completos (esto es, la falla se produjo dentro del tiempo observado-cantidad de ciclos) y se presentan en la tabla 1.

70	90	96	97	99	100	103	104
104	105	107	108	108	108	109	109
112	112	113	114	114	114	116	119
120	120	120	121	121	123	124	124
124	124	124	128	128	129	129	130
130	130	131	131	131	131	131	132
132	132	133	134	134	134	134	134
136	136	137	138	138	138	139	139
141	141	142	142	142	142	142	142
144	144	145	146	148	148	149	151
151	152	155	156	157	157	157	157
158	159	162	163	163	164	166	166
168	170	174	196	212			

Tabla 1. datos de fatiga de aluminio

Puede llevarse a cabo diversos análisis exploratorios de los datos, como un histograma (Figura 2), o cálculo de medidas de posición y desvío muestrales, obteniéndose:

$$\text{mean(datos)} = 133.7327$$

$$\text{var(datos)} = 499.7778$$

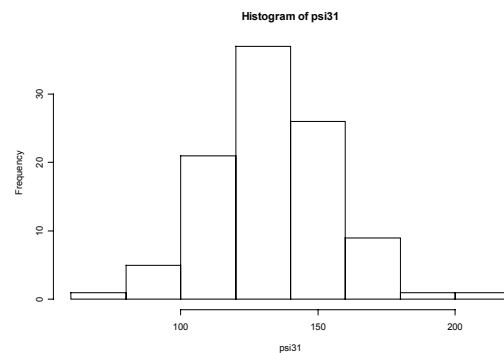


Figura 2. Histograma para los datos de aluminio.

Para lograr el ajuste de la distribución BS a estos datos, se pide la estimación de los parámetros de posición y forma, los que resultan:

$$\alpha = 0.1703847$$

$$\beta = 131.8188$$

El modelo ajustado corresponde entonces a la densidad de la Figura 3.

## 6.2 Otro análisis de datos reales

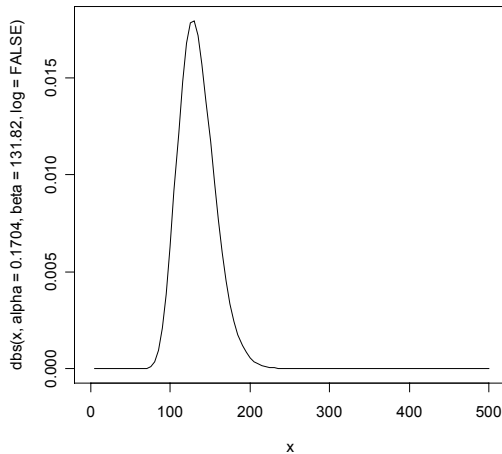


Figura 3. curva BS ajustada a los datos.

Para evaluar la bondad de ajuste del modelo BS a estos datos, un gráfico QQ (cuantiles de los datos versus cuantiles de la distribución teórica) puede ayudar a un análisis visual. Este se lleva a cabo mediante una sintaxis simple, ya que está incorporado directamente al paquete `bs` que se está utilizando. La Figura 4 muestra en dicho gráfico que los puntos correspondientes a los datos están muy cercanos a la recta, con lo que puede considerarse que el ajuste es aceptable.

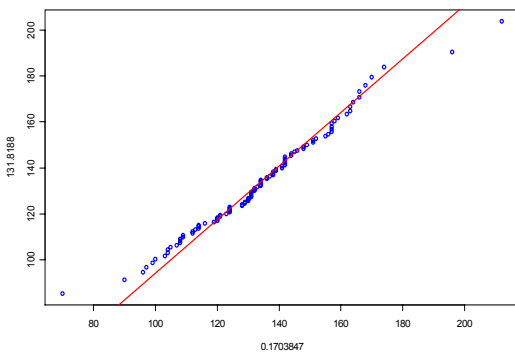


Figura 4. Gráfico QQ (cuantil-cuantil).

El análisis anterior se espera sea realizado por el alumno bajo consignas explícitas, aunque también dejando librado a su interés completar el estudio con información adicional tal como comparación con otros modelos, cálculo de media, desvío, mediana en el modelo, así como probabilidades que pudieran resultar de interés.

Los datos corresponden a tiempos de vida (en horas) de 10 soportes de cierto tipo. Los datos fueron usados como ejemplo ilustrativo para una distribución Weibull de 3 parámetros en Cohen, Whitten y Ding (1984) y han sido utilizados en diversos artículos ajustando el modelo Birnbaum-Saunders. Una ventaja de la utilización de este último es que deben ajustarse sólo dos parámetros, y otra ventaja es que el ajuste está implementado directamente en el software, con lo que no se requiere que el alumno tenga un manejo de software avanzado. La tabla 2 muestra los datos a analizar.

152.7	172.0	172.5	173.3	193.0
204.7	216.5	234.9	262.6	422.6

Tabla 2. Datos de soportes

En este caso la propuesta de análisis contempla un ajuste de modelos adecuado, comparación con otros modelos y evaluación de la vida media de los soportes. Adicionalmente se pide hallar un tiempo de garantía  $T_G$ , esto es un tiempo a indicar como duración de los soportes de modo que el 95% de estos, por ejemplo, duren más que este tiempo  $T_G$ .

Para el ajuste del modelo con la distribución BS se tienen valores estimados de los parámetros que resultan:

$$\alpha = 0.2824891$$

$$\beta = 212.0491$$

Para evaluar otros modelos posibles, se pueden proponer la distribución Weibull y la Gamma, por ejemplo. Esto se logra mediante comandos simples, sin programación adicional, a saber:

```
fitdistr(datos, "weibull")
```

```
fitdistr(datos, "gamma")
```

con lo que se obtienen los parámetros de las distribuciones para construir la densidad de ajuste en cada modelo y compararla con la obtenida con el modelo BS, como se muestra en la Figura 5. La distribución Weibull que se ajusta no es exactamente la que propusieron Cohen y otros, dado que la que está directamente implementada en el software es la de dos parámetros.

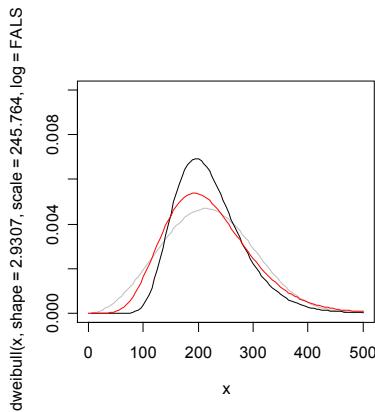


Figura 5. Densidad BS (línea negra), densidad Weibull (línea gris) y densidad Gamma (línea roja) ajustadas.

Debe mencionarse que los métodos de bondad de ajuste son poco adecuados en este caso, debido a la escasa cantidad de datos.

Un parámetro de interés a ser evaluado es la vida media de los soportes, siendo los valores estimados en cada modelo los que se muestran en la Tabla 3.

Modelo BS	220. 51
Modelo Weibull	219. 24
Modelo Gamma	220. 47

Tabla 3. Tiempo medio de vida de los soportes según cada modelo.

Para hallar el tiempo de garantía, se busca  $T_G$  tal que:

$$P(T > T_G) = 0.90$$

Esto correspondería a tener la inversa de la distribución acumulada de BS, la cual no está directamente implementada en el paquete. Aún así, evaluando la distribución acumulada el alumno puede ir aproximando el valor  $T_G$  requerido. La sintaxis para esta es también sencilla:

```
pbs(...,alpha=0.2824891,beta=212.0491,log=FALSE)
```

Con aplicaciones repetidas se tiene el tiempo de garantía requerido:  $T_G \cong 148$

## 7 DISCUSION

Puede destacarse que las actividades plantean trabajar esencialmente con problemas abiertos, donde el alumno debe investigar las estrategias de análisis disponibles. La propuesta de trabajo introduce al futuro ingeniero en un análisis de casos reales, y le proporciona herramientas para resolverlo, quedando a su disponibilidad la

intensificación de la tarea si se interesa en conocer otras aplicaciones del modelo o del software. Creemos que este tipo de propuestas resulta especialmente útil para lograr ese contacto indispensable entre el modelo teórico y una realidad.

## 8 REFERENCIAS

- Askeland, D. (1998). *Ciencia e Ingeniería de los Materiales*. Quinta edición. International Thomson Editores. México.
- Birnbaum, Z.W. & Saunders, S.C. (1969). A new family of life distributions. *Journal of applied probability*. Vol 6: 319-327.
- Cohen, A. C.; Whitten, B. J. & Ding, Y. (1984). Modified moment estimation for the three-parameter Weibull distribution. *Journal of Quality Technology*, 16, 159-167.
- Dell'Omodarme, M. & Valle, G. (2006). Teaching statistics with Excel and R. *arXiv.org:physics/0601083*. (Subj-class: Data Analysis, Statistics and Probability)
- Freund, J.E. & Walpole, R.E. (1980). *Mathematical Statistics*. Third edition. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Gere, J. (2002). *Mecánica de Materiales*. Tercera edición. International Thomson Editores. México.
- R Development Core Team (2008). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0. URL: <http://www.R-project.org>.
- Leiva, V.; Hernández, H. & Riquelme, M. (2006). A New Package for the Birnbaum-Saunders Distribution. *R news*, Vol. 6/4, 35-40.